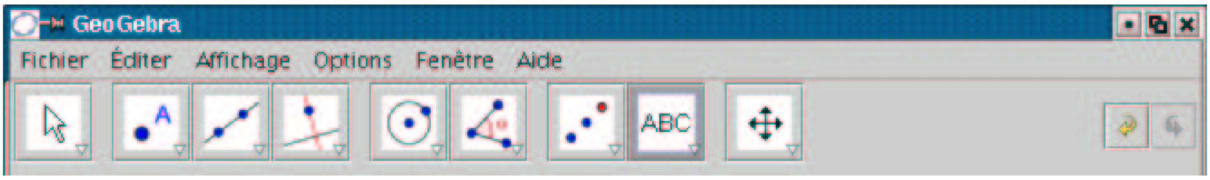
La géométrie analytique vue par GeoGebra.

I. Le tour du propriétaire.

GeoGebra nous propose un plan de travail divisé en deux colonnes : à gauche un état des lieux « algébrique », à droite la **feuille de travail**.

Ces deux colonnes sont chapeautées par une double barre d'outils :



Un tampon d'édition d'une ligne souligne l'ensemble, dans ce tampon, le champ « Saisie » nous concerne particulièrement comme nous allons le voir.

Sans faire un catalogue exhaustif, notons quelques particularités de GeoGebra :

Le menu « Fichier » propose, outre la gestion classique des enregistrements, la possibilité d'**exporter** la feuille de travail, i.e. le dessin au format **png**, ce qui est banal, mais aussi au format PostScript vectoriel **eps** ce qui est vraiment pratique pour récupérer les figures dans un document Latex.

La ligne suivante nous propose, de gauche à droite, neuf menus classiques avec quelques outils particulièrement sophistiqués, jugez en :

1. Le menu *pointeur*, permet de déplacer ou de **faire tourner un objet autour d'un point**.
2. Le menu *point*, très classique propose un point libre, une intersection ou le milieu d'un segment.
3. Le menu *ligne* propose les objets courants : droite, demi-droite, segment, polygone et autres vecteurs.
4. Le quatrième menu offre, outre les habituelles droites perpendiculaires parallèles etc, la construction des **tangentes** à un cercle et même d'une **polaire**.
5. Le menu *cercle* est certainement un des plus complets parmi les logiciels de géométrie dynamique. On y touve trois définitions du cercle, les **arcs de cercle**, **les secteurs angulaires** et même une définition d'une conique par cinq de ses points.
6. Un même menu *angle et distances* (veiller à préciser l'unité d'angle dans les options) propose aussi la définition d'un **lieu géométrique**.
7. Le menu *transformations du plan* inclut les symétries, la rotation, la translation et l'homothétie d'un objet.
8. Le menu *insérer* propose aussi le prédicat **relation entre deux objets**. Il fallait le placer quelque part.
9. Le menu *déplacer la feuille*, last but not least, nous offre les outils indispensables pour assurer une belle présentation de la feuille.

Pour conclure nous ajouterons que le logiciel GeoGebra ainsi que son mode d'emploi sont traduits en plusieurs langues dont l'Autrichien natif et le Chinois.

Nous vous proposons de découvrir, sur deux exercices de géométrie analytique, l'interaction permanente qui existe entre les constructions géométriques et le calcul algébrique.

II. Un problème de charpente.

Nous partons du fait que les élèves disposent d'un énoncé leur précisant la modélisation du problème avec, notamment, le nom des points de base et l'allure générale du toit.

Geogebra permet d'inclure une image dans ou derrière la figure. Nous n'utilisons pas cette possibilité car donner de l'épaisseur aux chevrons risque, selon notre point de vue, d'induire une certaine confusion dans la définition des points.

Comme la figure est assez explicite, nous n'avons pas recopié l'énoncé.

Dans le tampon d'édition, nous tapons puis nous validons successivement les **définitions** des deux points de base de la charpente :

M_1 = (–6,1), notons le tiret bas pour que le chiffre **1** apparaisse en indice,

M_2 = (6,4),

F = (0,5),

A_1 = (–2,0),

A_2 = (6,0).

Dès qu'une formule est validée, le point est tracé et sa référence figure dans la colonne de gauche du plan de travail.

Attention, si nous utilisons une minuscule, GeoGebra définit un vecteur et non un point.

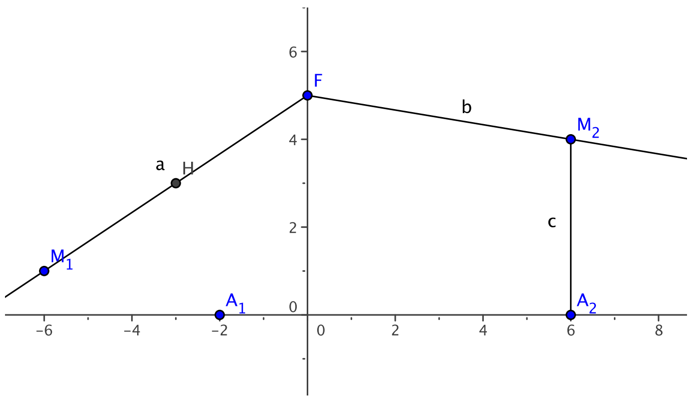
Quand les points de base sont tracés, nous utilisons des outils *géométriques* pour tracer les poutres soutenant le toit. Nous utilisons l'outil « Demi-droite passant par deux points » en prenant bien soin de pointer d'abord sur l'origine.

Nous traçons ensuite le segment $[A_2,\ M_2]$ avec l'outil « Segment entre deux points ».

Les objets crées sont automatiquement nommés, il est toujours possible de les renommer.

Les équations des *demi*-droites tracées ainsi que la longueur du segment $[A_2,\ M_2]$ figurent dans la colonne de droite.

Comme vous savez que GeoGebra est totalement gratuit et que les élèves peuvent en disposer chez eux, cela donne des idées.



Question **1.**

Le point H étant le milieu du segment $[M_1,\ F]$, déterminer la longueur A_1H.

Nous définissons le point H en tapant dans le tampon d'édition :

H = MilieuCentre[M_1,F], tout simplement,

ou en utilisant l'outil « Milieu ou centre ».

Dans ce dernier cas il est peu probable que GeoGebra nomme « H » le point trouvé, vous devrez donc le renommer.

Il ne reste plus qu'à faire calculer la distance cherchée en tapant :

d_1 = Distance[A_1,H], ou en utilisant l'outil « Distance ».

la valeur approchée de d_1 apparaît aussitôt dans la colonne de Gauche.

Il reste encore aux élèves à trouver la valeur exacte !

Notons qu'il est tout aussi facile de trouver la distance d'un point à une droite ou même de deux droites, mais ceci ne nous concerne pas ici.

Question **2.**

Pour tailler convenablement la poutre $[A_1, H]$ nous avons besoin de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{HA_1}, \overrightarrow{HF})$.

Nous utilisons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{HA_1}$ et $\overrightarrow{HF}$ pour déterminer le cosinus :

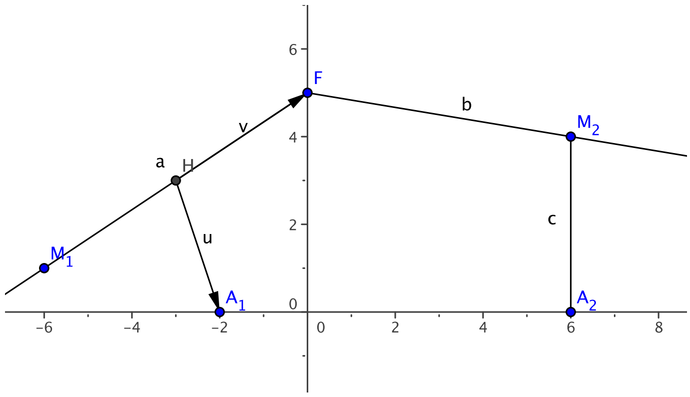
Avec l'outil « Vecteur défini par deux points », nous traçons les deux vecteur $\overrightarrow{HA_1}$ et $\overrightarrow{HF}$.

GeoGebra les nomme « u » et « v », sans flèche, ce qui nous convient.

Ceci fait, nous tapons la formule complète dans le tampon d'édition :

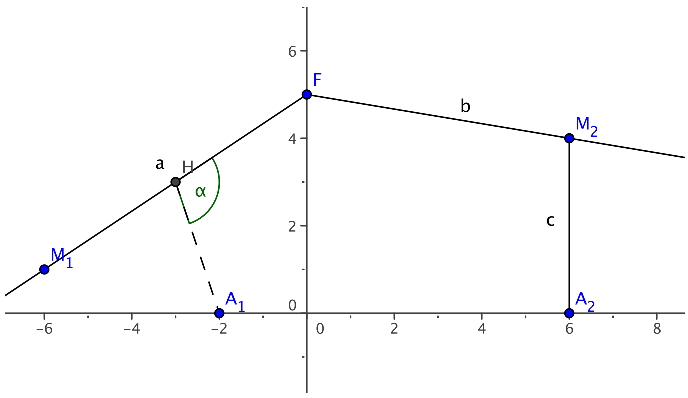
$\boldsymbol{\theta}$ **= acos(u*v / Longueur[u] / Longueur[v])**.

C'est simple et efficace, la valeur de θ, **<u>en radians</u>**, apparaît dans la colonne de gauche.



Nous avons choisi d'utiliser le produit scalaire pour des raisons didactiques, mais celui qui veut arriver directement au but sans aucune justification peut tout simplement **représenter** l'angle $(\overrightarrow{HA_1}, \overrightarrow{HF})$ en utilisant l'outil « Angle » et en cliquant avec la souris successivement sur les points A_1, H et F.

Le résultat numérique est identique, même si on a oublié de matérialiser le côté $[H, A_1]$.



Attention.

Il peut être utile de vérifier l'unité d'angle utilisée, en cas de doute on manipule plusieurs fois le bouton « Unité d'angle » dans le menu Options en comparant le résultat affiché.

III. Intersection d'un cercle et d'une droite.

Comme dans le problème précédent, nous supposons la modélisation effectuée et nous ne nous intéressons qu'au mode opératoire.

Pour tracer le cercle de rayon **4**, une analyse immédiate permet d'affirmer qu'il s'agit d'un cercle de centre $C\ :\ (-4,\,4)$ et de rayon 4.

Dans le tampon d'édition, nous tapons puis nous validons successivement les **définitions** du centre C et des deux points définissant la droite d :

C = (–4,4),

M_1 = (–10,0), notons le tiret bas pour que le chiffre **1** apparaisse en indice,

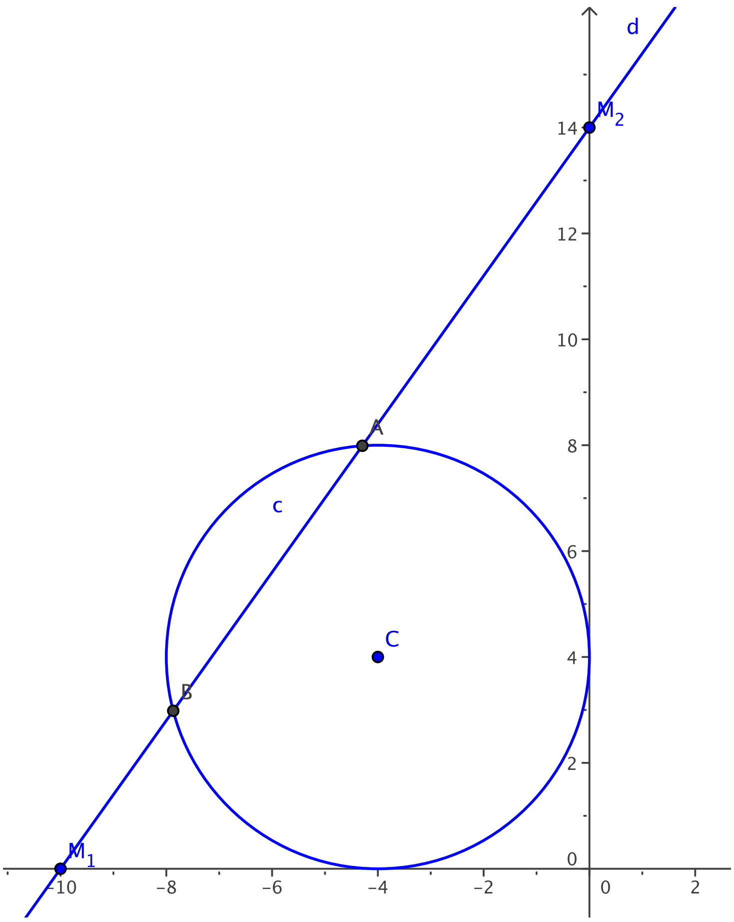
M_2 = (0,14),

Dès qu'une formule est validée, le point est tracé et sa référence figure dans la colonne de gauche du plan de travail.

Nous ajoutons le point auxiliaire $C'\ :\ (-4,\,0)$ qui nous servira à tracer le cercle :

C' = (–4,0).

Quand le point est tracé, nous ouvrons sa boîte de propriétés (clic droit) et nous cochons la case « Objet auxiliaire » pour ne pas encombre la liste des objets libres.



Attention, si nous utilisons une minuscule, GeoGebra définit un vecteur et non un point.

Quand les points de base sont tracés, nous utilisons des outils *géométriques* pour tracer le cercle de centre C, passant par C' et la droite $(M_1,\,M_2)$.

Les objets crées sont automatiquement nommés, il est toujours possible de les renommer.

Nous nommons d la droite $(M_1,\,M_2)$ *et c le cercle.*

Ceci fait, nous ouvrons la boîte de propriétés du point C' (clic droit sur le point C') pour cacher ce point.

Les équations des objets tracées figurent dans la colonne de droite.

Notons que si nous avions tracé un segment de droite au lieu d'une droite, c'est la distance M_1M_2 qui figurerait dans la colonne de droite.

Question **1.**

Soient A et B les points d'intrersection du cercle c et de la droite d, déterminer la **longueur de la corde** $[A, B]$.

Nous prenons l'outil « intersection entre deux objets » pour déterminer en deux clics (un clic gauche sur c, l'autre sur d) les deux points A et B.

L'outil « Distance » est ensuite utilisé pour afficher la longueur de la corde $[A, B]$ dans la colonne de gauche.

L'identificateur attribué par défaut à cette distance est peu explicite, il est possible de le remplacer par « AB ».

Question **2.**

Déterminer les tangentes a et b au cercle c respectivement par les points A et B.

Pour le calcul, on exprime que la droite a est perpendiculaire en A au rayon $[C, A]$, sinon GeoGebra nous propose directement l'outil « Tangentes ».

Les coefficients des équations fournies sont des valeurs approchées, mais elles peuvent suffire pour **vérifier** la plausibilité d'un résultat exact.

Nos lecteurs les plus fanatiques pourront rechercher quelle est la probabilité pour que cette vérification soit fiable.

Question **3.**

Calculer la valeur de la mesure de l'angle que fait la droite d avec la tangente a.

Une construction auxiliaire est ici nécessaire car, pour déterminer un angle, GeoGebra demande son sommet, on s'en doute, et un point sur chacun de ses côtés.

La solution la plus économique serait de tracer le point d'intersection des deux tangentes, nous préférons la solution plus analytique qui utilise le point d'intersection d'une droite avec un des axes de coordonnées.

Pour déterminer l'angle des droites a et d, nous traçons d'abord le point A', intersection de la droite a avec l'axe des ordonnées :

A' = Intersection[a, axeY],

Ceci fait, nous définissons l'angle Θ_A :

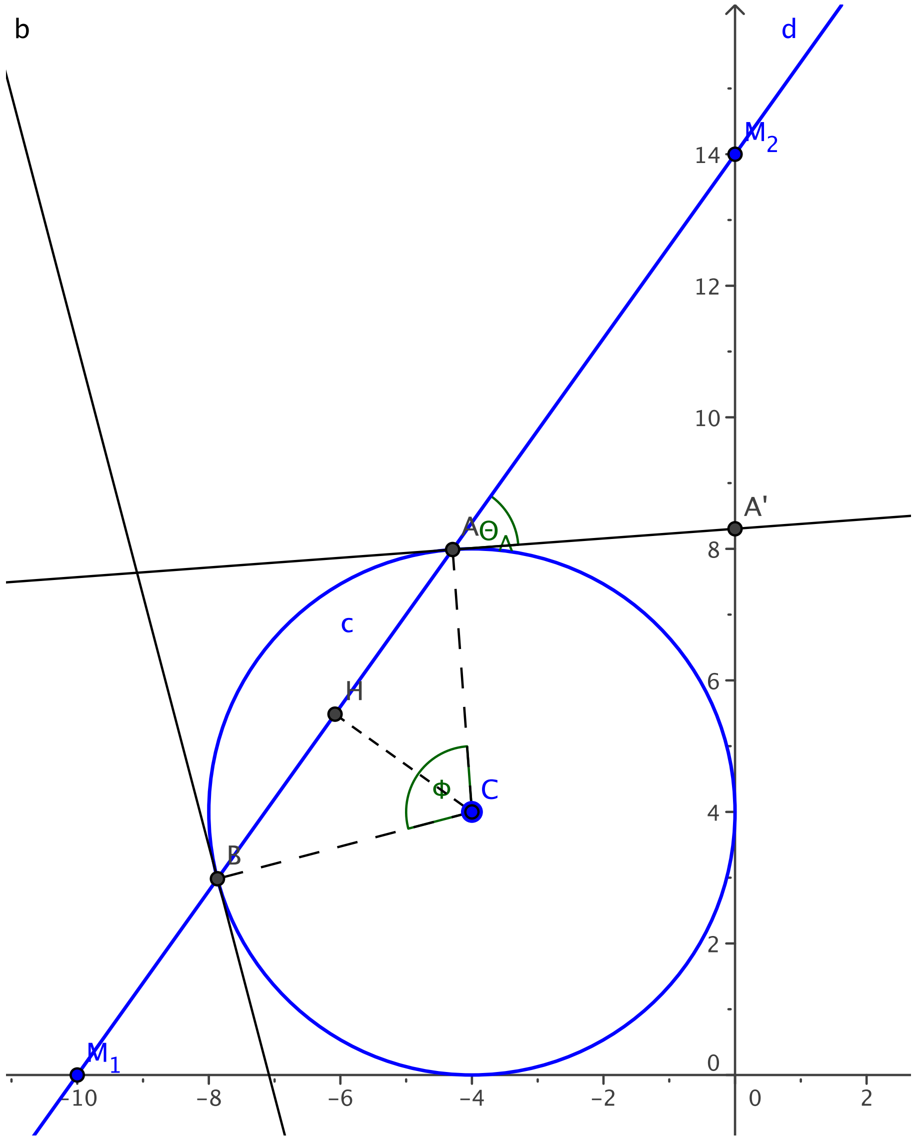
$\mathbf{\Theta_A = Angle[A', A, M_2]}$.

Remarques.

1. Si nous ouvrons la boîte de propriétés de la droite a pour écrire son équation sous la forme résolue en y, nous voyons apparaître explicitement l'ordonnée du point A' (ordonnée à l'origine) dans l'équation affichée.
2. Nous avons défini le point A' littéralement, il est aussi possible d'utiliser, comme nous l'avons fait ailleurs, l'outil « Intersection ».
3. Pour calculer la mesure de l'angle, nous avons utilisé l'expression littérale tapée dans le tampon d'édition, nous avons vu dans l'exercice précédent qu'il était possible d'utiliser l'outil « Angle » ou même de taper la formule utilisant le produit scalaire.

***Question* 3.**

Calculer la mesure de l'aire S limitée par le cercle c et la corde $[A,\, B]$.



Ce calcul effectue une synthèse des méthodes que nous venons de voir :

1. Nous calculons la mesure de l'angle $\Phi = (\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CB})$:

   $\mathbf{\Phi = Angle[A,\ C,\ B]}$.

2. Nous calculons la hauteur CH du triangle $(A,\, B,\, C)$, i.e. la distance du point C à la droite d :

   $\mathbf{CH = Distance[C,\ d]}$.

3. Le rayon du cercle est connu depuis le départ, soit **4**.

   Nous tapons l'expression de l'aire S, comme suit, dans le tampon d'édition :

   $\mathbf{S = 16 * \Phi/2 - AB * AH/2}$.

Attention ! Il y a quand même un piège.

> ***Même si l'affichage se fait en degrés, GeoGebra considère toujours que les mesures des angles sont effectuées en radians !***